Visión Antataura
Vol.7, No.2: 52-65
Diciembre, 2023 – Mayo, 2024
Panamá
ISSN L 2520-9892

Triángulos Perfectos

Perfect Triangles

Alicia M. Delgado de Brandao[1], Yanina del Carmen Rodríguez Reyes[2], Ubaldino Sandoval Moreno[3], Temístocles Zeballos Mitre[4]

[1]Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Azuero, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología, Departamento de Matemática, Panamá; aliciadelgado0719@gmail.com; https://orcid.org/0000-0003-4999-554X
[2]Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Azuero, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología, Departamento de Matemática, Panamá; rryanina06@gmail.com; https://orcid.org/0000-0003-4757-950X
[3]Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Azuero, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología, Departamento de Matemática, Panamá; ubasando@gmail.com; https://orcid.org/0000-0003-2171-9703
[4]Universidad de Panamá, Centro Regional Universitario de Azuero, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología, Departamento de Matemática, Panamá; temizeballos@gmail.com; https://orcid.org/0000-0002-1557-5769

Fecha de recepción: 26 de agosto de 2023 *Fecha de aceptación: 14 de octubre de 2023*

DOI https://doi.org/10.48204/j.vian.v7n2.a4562

Resumen: En este artículo, se presenta una breve historia de cómo la relación entre el perímetro y el área de un triángulo lleva a la comunidad matemática a interesarse en ese campo de estudio. Se define el concepto de triángulo racional, se presenta la demostración de la fórmula de Herón, se exhiben las contribuciones de Brahmagupta, Euler, Carmichael relacionadas a la búsqueda de triángulos racionales. Seguidamente, se definen los conceptos de triángulo entero, triángulo pitagórico y se demuestran algunas de sus propiedades. Finalmente, se define el concepto de triángulo perfecto y se presentan los resultados y demostraciones que nos permiten concluir sobre la existencia de los mismos.

Palabras claves: Triángulo entero, triángulo perfecto, fórmula de Herón.

Abstract: This article presents a brief history of how the relationship between the perimeter and the area of a triangle leads the mathematical community to become interested in this field of study. The concept of rational triangle is defined, the demonstration of Heron's formula is presented, and the contributions of Brahmagupta, Euler, and Carmichael related to the search for rational triangles are exhibited. Next, the concepts of a integral triangle and Pythagorean triangle are defined, and some of their properties are demonstrated. Finally, the concept of the perfect triangle is defined, and the results and demonstrations that allow us to conclude about their existence are presented.

Key words: Integral triangle, perfect triangle, Heron's formula.

1. Introducción

A través de los tiempos las propiedades de los triángulos han llamado la atención de una gran cantidad de matemáticos, una de estas propiedades interesantes es la de un triángulo cuyas longitudes de los lados y el área del mismo son números racionales.

La teoría matemática relacionada con los triángulos racionales es muy amplia y enriquecedora, su desarrollo gira en torno a la búsqueda de triángulos con cada vez más parámetros que cumplan determinadas restricciones, ya sea que las longitudes de dichos parámetros sean números racionales, o se exija que sean números enteros; y que, además, las áreas sean enteros o racionales. Teoría que también se generaliza a otras figuras geométricas y en otras dimensiones.

Cuando se restringen los valores de las longitudes de los lados del triángulo y su área a números enteros y, además, se estudia la igualdad de la multiplicidad del área y el perímetro, aparece el concepto de triángulo perfecto. No es sorprendente que los triángulos rectángulos tengan un papel importante en la génesis del estudio de estas propiedades. También es natural preguntarse si existen triángulos no rectángulos con esas características.

2. Metodología

Motivados por los estudios de los matemáticos griegos, los triángulos racionales ocupan un espacio importante en el campo de la investigación matemática. Restringiendo el campo de estudio a los números enteros positivos, aparece el concepto de triángulos enteros y adicionando restricciones se llega al de triángulo perfecto.

Se definen los conceptos de triángulo de Herón, triángulo entero, triángulo pitagórico, triángulo pitagórico primitivo y triángulo perfecto.

Se prueba la fórmula de Herón, se demuestra que todo triángulo entero tiene perímetro par.

Posteriormente, se demuestra que todo triángulo pitagórico es entero y que cualquier triángulo entero isósceles se divide por la altura de la base en dos triángulos pitagóricos congruentes.

Se prueba que sólo existe un triángulo perfecto cuyo perímetro es numéricamente igual al doble de su área.

Para validar los resultados, se presentan ejemplos en los casos más importantes.

3. Historia

Herón de Alejandría (aproximadamente 10 d. C. -75 d.C.) encontró una fórmula extraordinaria para el área de un triángulo en términos del perímetro del triángulo y la longitud de los lados del triángulo; la cual nos lleva a una ecuación diofántica. Brahmagupta (598-670) encuentra una solución paramétrica que le permite generar una familia infinita de triángulos racionales. Euler (1707-1783) encontró el conjunto completo de soluciones paramétricas para triángulos racionales y Carmichael (1879-1967) exhibe una versión paramétrica más eficiente (Dickson, 1971).

Las soluciones paramétricas nos brindan infinitos triángulos racionales de forma sencilla; estos trabajos iniciales sientan las bases para cultivar resultados similares agregando nuevas restricciones al problema original.

Inmerso en esta bella teoría, se encuentra el problema abierto: ¿Existe un triángulo con aristas, medianas y área entera? (Guy, 2003). Varios autores definen "triángulo perfecto" como un triángulo con estos siete parámetros racionales; sin embargo, en este artículo generalizamos la definición de triángulo perfecto dada por R. R. Phelps (1926-2013) en 1955 y exhibimos los resultados obtenidos por W. A. Whitworth (1840-1905), D. Biddle (1885-1940) y N. J. Fine (1916-1994) (Dickson, 1971).

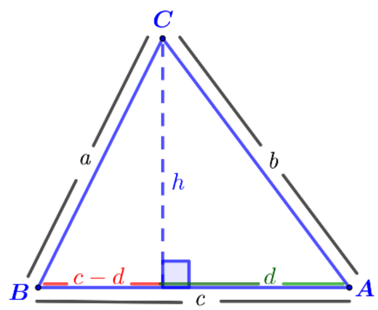
4. Triángulo racional

Definición 1: Un triángulo con lados de longitud racional y área racional se llama triángulo racional o triángulo de Herón (Dickson, 1971).

Propiedad 1: Fórmula de Herón (Caminha, A. 2018)

Si el triángulo ABC tiene lados de longitudes a,b,c y semiperímetro s, entonces el área del $\Delta\, ABC$ es $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Demostración: Considérese el triángulo de la figura siguiente:



El área del triángulo ABC está dada por $\frac{1}{2}ch$. Por lo tanto, se debe probar que $\frac{1}{2}ch = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$; o lo que es equivalente $c^2h^2 = 4s(s-a)(s-b)(s-c)$.

Por el Teorema de Pitágoras, se tiene que $h^2 + d^2 = b^2 \quad (1)$ y $(c-d)^2 + h^2 = a^2 \quad (2)$

De (1) se tiene que $h^2 = b^2 - d^2$ y por lo tanto, $c^2h^2 = c^2(b^2 - d^2) = b^2c^2 - c^2d^2$.

Por consiguiente, se debe probar que $b^2c^2 - c^2d^2 = 4s(s-a)(s-b)(s-c)$.

Del lado derecho de la igualdad anterior se tiene que:

$$
\begin{aligned}
4s(s-a)(s-b)(s-c) &= 2s(s-a)(s-b)(s-c)+2s(s-a)(s-b)(s-c)\\
&=\left[2s(s-a)(s-b)(s-c)\right]-\left[-2s(s-a)(s-b)(s-c)\right]\\
&=\left[s(s-a)+(s-b)(s-c)\right]^2-\left[s(s-a)-(s-b)(s-c)\right]^2\\
&=\left[2s^2+bc-as-bs-cs\right]^2-\left[cs+bs-as-bc\right]^2\\
&=\left[2s^2+bc-s(a+b+c)\right]^2-\left[s(c+b-a)-bc\right]^2\\
&=\left[2s^2+bc-s(2s)\right]^2-\left[\left(\frac{a+b+c}{2}\right)(c+b-a)-bc\right]^2\\
&=\left[2s^2+bc-2s^2\right]^2-\left[\frac{1}{2}(b+c+a)(c+b-a)-bc\right]^2\\
&=b^2c^2-\left[\frac{1}{2}\left((b+c)^2-a^2\right)-bc\right]^2\\
&=b^2c^2-\left[\frac{1}{2}\left(b^2+2bc+c^2-a^2\right)-bc\right]^2\\
&=b^2c^2-\left[\frac{1}{2}\left(b^2+c^2-a^2\right)\right]^2\\
&=b^2c^2-\left[\frac{1}{2}\left(h^2+d^2+c^2-h^2-(c-d)^2\right)\right]^2, \quad \text{por } (1) \text{ y } (2)\\
&=b^2c^2-\left[\frac{1}{2}\left(d^2+c^2-(c-d)^2\right)\right]^2\\
&=b^2c^2-\left[\frac{1}{2}\left(d^2+c^2-\left(c^2-2cd+d^2\right)\right)\right]^2\\
&=b^2c^2-c^2d^2.
\end{aligned}
$$

Quedando demostrada la fórmula de Herón.

Observación 1: En la búsqueda de triángulos racionales se obtiene la ecuación diofántica $\mathrm{A}^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$, donde A es el área del triángulo; por lo tanto, encontrar un triángulo racional es equivalente a resolver una ecuación diofántica (Carmichael, 2008).

Propiedad 2: Si $a,b,c\in\mathbb{Q}^{+}$, entonces $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}+b\right), \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{c}+c\right), \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}-b\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{c}-c\right)$ son las longitudes de los lados de un triángulo oblicuo cuyas alturas y área son racionales, el cual está formado por la yuxtaposición de dos triángulos rectángulos con cateto común a. Este resultado fue descubierto por Brahmagupta (Dickson, 1971).

Propiedad 3: Si $p,s,q,r \in ¤^{+}$, entonces $\frac{(ps \pm qr)(pr \mathrm{m} qs)}{pqrs}$, $\frac{p^2+q^2}{pq}$, $\frac{r^2+s^2}{rs}$ son las longitudes de los lados de un triángulo racional y todo par de lados están en razón de dos números de la forma $\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$. Este resultado fue descubierto por Euler (Dickson, 1971).

Propiedad 4: Si $k,m,n \in ¤^{+}$, entonces $n\left(m^2+k^2\right)$, $m\left(n^2+k^2\right)$, $(m+n)\left(mn-k^2\right)$ son las longitudes de los lados de un triángulo racional. Esta parametrización se debe a Carmichael (Carmichael, 2008).

Propiedad 5: Sean $a,b,c \in ¤^{+}$ las longitudes de los lados de un triángulo tales que a, b y c no tienen un factor común, entonces tres de los números $s-a$, $s-b$, $s-c$ y s no tienen un factor común; donde $s=\frac{a+b+c}{2}$.

Demostración: Sean $a,b,c \in ¤^{+}$ las longitudes de los lados de un triángulo tales que a, b y c no tienen un factor común.

Caso 1: Supóngase que s, $s-a$, $s-b$ tienen un factor común $v \in ¤^{+}$.

Entonces, existen $m_1, m_2, m_3 \in ¤^{+}$ tales que:

$$s = v\,m_1$$
$$s-a = v\,m_2$$
$$s-b = v\,m_3.$$

Luego,

$$\frac{a+b+c}{2} = v\,m_1 \Rightarrow a+b+c = 2v\,m_1 \Rightarrow c = 2v\,m_1 - a - b. \qquad (1)$$

$$s-a = v\,m_2 \Rightarrow vm_1 - a = v\,m_2 \Rightarrow vm_1 - v\,m_2 = a \Rightarrow v\left(m_1 - m_2\right) = a. \qquad (2)$$

$$s-b = v\,m_3 \Rightarrow vm_1 - b = v\,m_3 \Rightarrow vm_1 - v\,m_3 = b \Rightarrow v\left(m_1 - m_3\right) = b. \qquad (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1) se obtiene:

$$
\begin{aligned}
c &= 2v\,m_1 - v(m_1 - m_2) - v(m_1 - m_3) \\
&= v(\,2m_1 - m_1 + m_2 - m_1 + m_3) \\
&= v(\,m_2 + m_3).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, a, b y c tienen a v como factor común; lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, $s,\ s-a,\ s-b$ no tienen un factor común.

Igual contradicción se obtiene para los casos en que $s,\ s-a,\ s-c$ tienen un factor común $v \in ¤^{+}$ o $s,\ s-b,\ s-c$ tienen un factor común $v \in ¤^{+}$

Caso 2: Supóngase que $s-c,\ s-a,\ s-b$ tienen un factor común $v \in ¤^{+}$.

Entonces, existen $m_1, m_2, m_3 \in ¤^{+}$ tales que:

$$
\begin{aligned}
s - c = v\,m_1 &\Rightarrow \frac{a+b+c}{2} = c + vm_1 \\
&\Rightarrow a+b+c = 2c + 2vm_1 \\
&\Rightarrow a+b = c + 2vm_1 \\
&\Rightarrow a = c - b + 2vm_1 \quad (1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s - a = v\,m_2 &\Rightarrow \frac{a+b+c}{2} = a + vm_2 \\
&\Rightarrow a+b+c = 2a + 2vm_2 \\
&\Rightarrow b+c = a + 2vm_2 \\
&\Rightarrow a = b + c - 2vm_2 \quad (2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s - b = v\,m_3 &\Rightarrow \frac{a+b+c}{2} = b + vm_3 \\
&\Rightarrow a+b+c = 2b + 2vm_3 \\
&\Rightarrow a+c = b + 2vm_3 \\
&\Rightarrow a = b - c + 2vm_3 \quad (3)
\end{aligned}
$$

De (1) y (2) se tiene que:

$$
\begin{aligned}
c - b + 2vm_1 &= b + c - 2vm_2 \\
2vm_1 + 2vm_2 &= 2b \\
vm_1 + vm_2 &= b \\
(m_1 + m_2)v &= b \quad (4)
\end{aligned}
$$

De (2) y (3) se tiene que:

$$b+c-2vm_2=b-c+2vm_3$$
$$2c=2vm_3+2vm_2$$
$$c=vm_3+vm_2$$
$$c=\left(m_3+m_2\right)v \quad (5)$$

Reemplazando (4) y (5) en (1) se obtiene:

$$a=\left(m_3+m_2\right)v-\left(m_1+m_2\right)v+2vm_1$$
$$a=\left(m_3+m_1\right)v.$$

Por lo tanto, a, b y c tienen a v como factor común; lo cual es una contradicción.

Así, $s-c,\ s-a,\ s-b$ no tienen un factor común.

Observación 2: Con la restricción de la propiedad anterior, se evita tratar con triángulos que son semejantes a cualquier triángulo primitivo.

5. Triángulo entero

Definición 2: Un triángulo con lados de longitud entera y área entera se llama triángulo entero (Dickson, 1971).

Teorema 1: Si $\Delta\ ABC$ es un triángulo entero*,* entonces $\Delta\ ABC$ tiene perímetro par.

Demostración: Sea $\Delta\ ABC$ un triángulo con lados de longitud $a,b,c\in ¢^{+}$ y área A entera.

De la fórmula de Herón se tiene que: $\mathrm{A}^2=s\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)$, donde $s=\dfrac{a+b+c}{2}$

Luego,

$$A^2=\frac{a+b+c}{2}\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)$$
$$A^2=\frac{\left(a+b+c\right)}{2}\left(\frac{a+b+c-2a}{2}\right)\left(\frac{a+b+c-2b}{2}\right)\left(\frac{a+b+c-2c}{2}\right)$$
$$16A^2=\left(a+b+c\right)\left(a+b+c-2a\right)\left(a+b+c-2b\right)\left(a+b+c-2c\right)$$
$$2\left(8A^2\right)=\left(a+b+c\right)\left(a+b+c-2a\right)\left(a+b+c-2b\right)\left(a+b+c-2c\right) \qquad (1).$$

Supóngase que el perímetro es un número impar.

Entonces, los cuatro factores en el lado derecho de (1) son números impares y por lo tanto, su producto también es un número impar; lo cual es una contradicción ya que el lado izquierdo es un múltiplo de 2.

Por lo tanto, el perímetro del $\Delta\ ABC$ es par.

Definición 3: Un triángulo pitagórico es un triángulo rectángulo con lados de longitud entera. Un triángulo pitagórico donde las longitudes de sus lados son números primos relativos se conoce como triángulo pitagórico primitivo (Ore, 2016).

Propiedad 6: Cualquier triángulo pitagórico es un triángulo entero.

Demostración: Sea ΔABC un triángulo pitagórico.

Se sabe que el área del ΔABC es $\frac{1}{2}ab$, donde a y b son las longitudes de los catetos.

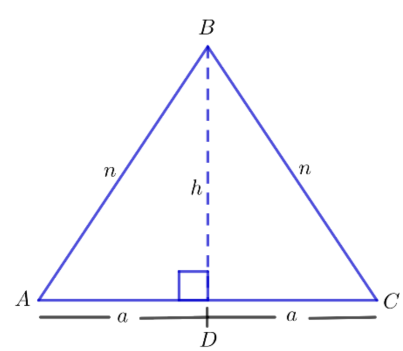
Si ΔABC es un triángulo pitagórico primitivo, entonces $(a,b,c)=(m^2-n^2,2mn,m^2+n^2)$, $m>n$, $m,n\in ¢^{+}$. Por lo tanto, b es un número par y el área es un número entero.

Si ΔABC es un triángulo pitagórico no primitivo, entonces por lo menos un cateto es par y por lo tanto, el área es un número entero.

Así, en ambos casos, ΔABC es un triángulo entero.

Propiedad 7: Cualquier triángulo entero isósceles se divide por la altura de la base en dos triángulos pitagóricos congruentes.

Demostración: Sea ΔABC un triángulo entero isósceles. Sea n la longitud de los lados congruentes y h la longitud de la altura de la base.



Como $\Delta\ ABC$ es entero, por el Teorema 1, su perímetro es par y, además, por ser isósceles se tiene que la base es un número par, digamos $2a$.

Luego, de la fórmula de Herón se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^2 &= s(s-2a)(s-n)(s-n) \\ &= (n+a)(n-a)(a)(a) \\ &= (n^2-a^2)(a^2) \end{aligned}$$

Como A es un número entero, entonces $n^2-a^2=h^2$ es un número cuadrado; por lo tanto, h es un número entero.

Así, se tiene que los Δ ABD y Δ CBD son triángulos pitagóricos congruentes.

Observación 3: No existen triángulos pitagóricos isósceles.

Propiedad 8: Si los lados de un triángulo entero tienen un factor común k, entonces el área es divisible por k^2; es decir, el triángulo reducido por el factor k también es entero.

Demostración: Sin pérdida de generalidad supóngase que k es primo y considérese el triángulo entero cuyas longitudes de los lados son ka, kb, kc.

Luego, de la fórmula de Herón se tiene:

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \sqrt{(ks)\left(\left[k(s-a)\right]\left[k(s-b)\right]\left[k(s-c)\right]\right)} \\ &= \sqrt{k^4 s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= k^2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \end{aligned}$$

Por hipótesis se tiene que k es entero; por lo tanto, k^2 es también entero. Además, se tiene que A es entero; lo cual implica que el producto de la derecha es un número entero, de donde se deduce que es un número entero.

Note que $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ es el área del triángulo reducido por el factor k.

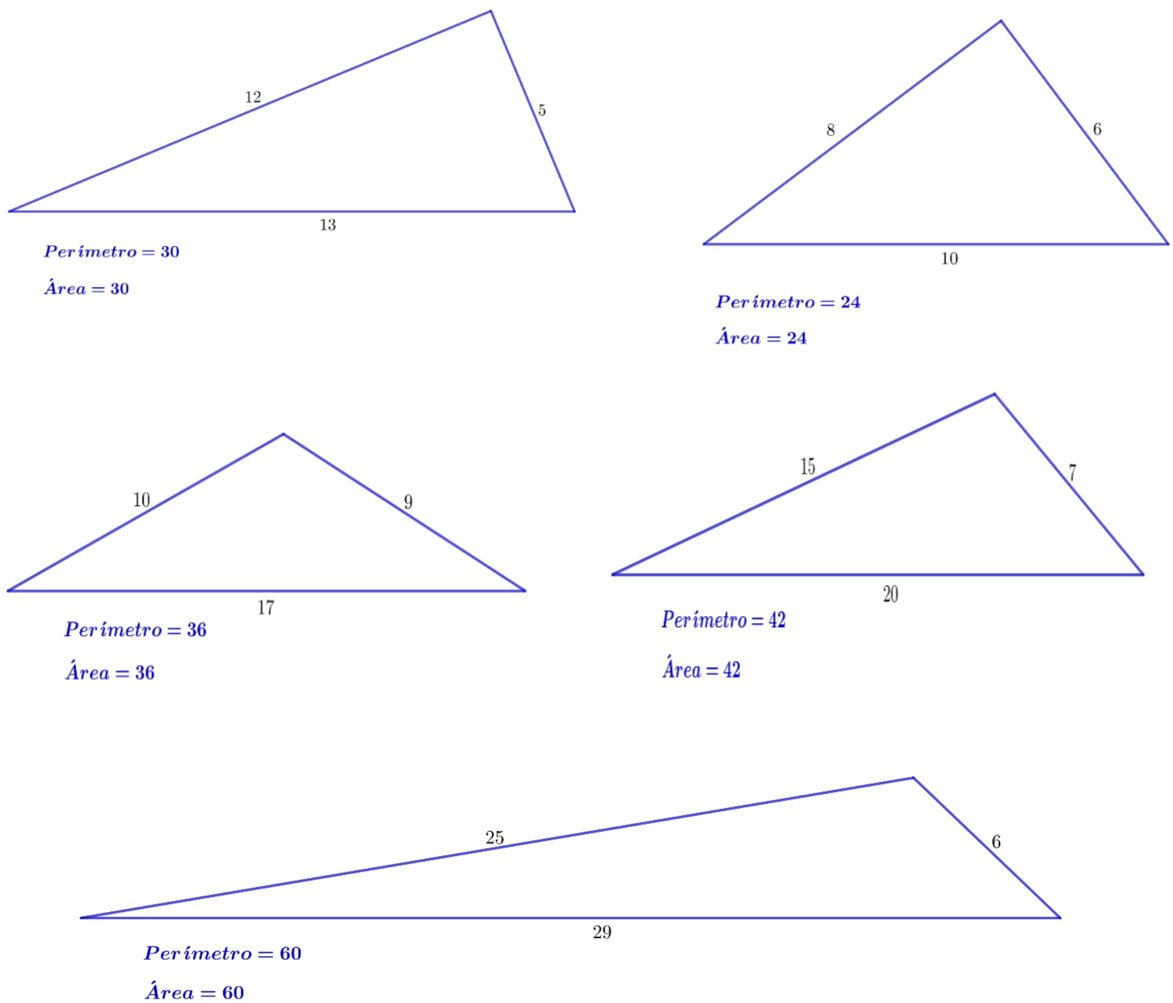
Así, dicho triángulo también es entero.

6. Triángulo perfecto

Esta sección se dedica a responder interrogantes como: ¿Existen triángulos enteros cuyo perímetro es numéricamente igual a su área?, ¿Existen triángulos enteros cuyo perímetro es numéricamente igual a un múltiplo de su área?

Definición 4: Un triángulo entero cuyo perímetro es numéricamente un múltiplo de su área es un triángulo perfecto.

Respondiendo a la primera interrogante, William Allen Whitworth y Annie Dale Biddle probaron, en 1904, que los únicos triángulos perfectos cuyo perímetro es numéricamente igual a su área son los siguientes (Dickson, 1971):



Es natural preguntarse en este momento: ¿Existen triángulos enteros cuyo perímetro es numéricamente igual al doble de su área?

En 1956, Nathan Jacob Fine probó que sólo existe un triángulo perfecto cuyo perímetro es numéricamente igual al doble de su área (Subbarao, 1971).

Propiedad 9: Sólo existe un triángulo perfecto cuyo perímetro es numéricamente igual al doble de su área.

Demostración: Sea (a,b,c) el triángulo perfecto buscado.

Sabemos que $\mathrm{A}^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ y que $2s = P = a+b+c$.

Por hipótesis, $P = 2\mathrm{A}$; lo que implica que $2s = 2\mathrm{A}$ y por lo tanto, $s = \mathrm{A}$.

Luego,

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^2 &= \mathrm{A}(\mathrm{A}-a)(\mathrm{A}-b)(\mathrm{A}-c) \\ \mathrm{A} &= (\mathrm{A}-a)(\mathrm{A}-b)(\mathrm{A}-c). \end{aligned}$$

Sean

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{A}-a \\ y &= \mathrm{A}-b \\ z &= \mathrm{A}-c \end{aligned}$$

Así, $\mathrm{A} = xyz \qquad (1)$.

Note que x, y, z son números enteros positivos.

Supóngase, sin pérdida de generalidad, que $z \le y \le x$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} x+y+z &= (\mathrm{A}-a)+(\mathrm{A}-b)+(\mathrm{A}-c) \\ &= 3\mathrm{A}-(a+b+c) \\ &= 3\mathrm{A}-P \\ &= 3\mathrm{A}-2\mathrm{A} \\ &= \mathrm{A} \end{aligned}$$

Así, $\mathrm{A} = x+y+z \qquad (2)$.

De (1) y (2) se tiene que $x+y+z = xyz \qquad (3)$.

Como $y \le x$ y $(yx-1)$ es positivo, entonces

$$\begin{aligned} y(yz-1) &\le x(yz-1) \\ &= xyz - x \\ &= x+y+z-x, \quad \text{por } (3) \\ &= y+z \end{aligned}$$

De donde se obtiene que $y(yz-1) \le y+z$.

Dado que $z \le y$, se tiene que $y(yz-1) \le y+z \le 2y$.

Lo anterior implica que $yz-1\leq 2$ y por lo tanto, $yz\leq 3$ $\quad(4)$.

Como $z\leq y$, entonces $z^2\leq yz\leq 3$; lo cual implica que $z=1$ $\quad(5)$.

Reemplazando (5) en (3), se tiene que:

$$\begin{aligned} x+y+1&=xy \\ y+1&=xy-x \\ y+1&=x(y-1) \qquad (6) \end{aligned}$$

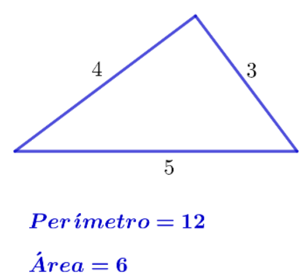
De (4) y (5)se tiene que $y\leq 3$.

Tomando $y=3$, de (6) se llega a que $4=2x\Rightarrow x=2$; lo cual contradice que $y\leq x$.

Por lo tanto, queda la opción (única) $y=2$, de (6) se tiene que $x=3$.

Por consiguiente, $\mathrm{A}=3+2+1=6$ y $a=3,\ b=4,\ c=5$.

Así, queda demostrado que el único triángulo perfecto cuyo perímetro es numéricamente igual al doble de su área es el triángulo $(3,4,5)$



La pregunta inmediata es: ¿Existen triángulos perfectos que verifiquen algunas de las siguientes relaciones: $P=3A,\ \ P=4A,\ \ P=5A,\ \ \mathrm{L}$?

No existen triángulos perfectos que verifiquen la relación $P=n\mathrm{A}$, para n natural mayor que 2 (Subbarao, 1971).

7. Conclusiones

Con lo desarrollado y demostrado en este artículo, se puede concluir:

- La fórmula de Herón juega un papel fundamental en la solución de los problemas relacionados a los triángulos racionales, enteros y perfectos.

- Todo triángulo pitagórico es un triángulo entero.
- Existen únicamente cinco triángulos perfectos cuyo perímetro es numéricamente igual a su área.
- Sólo existe un triángulo perfecto cuyo perímetro es numéricamente igual al doble de su área, el cual resulta ser pitagórico primitivo.
- Sólo existen tres triángulos perfectos pitagóricos, de los cuales dos son primitivos.

Referencias bibliográficas

Dickson, L. E. (1971). *History of the Theory of Numbers. Volume II*. Chelsea Publishing Company, New York.

Caminha, A. (2018). *An Excursion Through Elementary Mathematics, Volume II- Euclidean Geometry*- Springer Verlag, New York.

Carmichael, R.D. (2008). *Diophantine Analysis (1915)*. Kessinger Publishing, LLC. Montana.

Ore, O. (2016). *Invitation to Number Theory* (2ª ed.). The Mathematical Association of America.

Guy, R. K. (2003). *Unsolved Problems in Number Theory* (3ª ed.). Springer Verlag.

Subbarao, M. V. (1971). Perfect Triangles. *The American Mathematical Monthly*, 78(4), 384-385. https://doi.org/10.1080/00029890.1971.11992768