	REVISTA SABERES APUDEP **ISSN L 2953-321X** Acceso Abierto. Disponible en: https://revistas.up.ac.pa/index.php/saberes_apudep	Vol.6, No.2 Julio- Diciembre 2023 pp. 8-26	

AMPLIACIONES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS A TRAVÉS DE LA HISTORIA, PARA POLÍGONOS REGULARES

EXTENSIONS OF THE PYTHAGORAS THEOREM THROUGH HISTORY, FOR REGULAR POLYGONS

Lorenzo Caballero Vigil

Universidad de Panamá, Extensión Universitaria de Soná, Facultad de Ciencias Naturales Exactas y Tecnología, Panamá.

lorenzo.caballero@up.ac.pa, https://orcid.org/0000-0003-0758-7038

Johanna E. Castillo Mendoza

Universidad de Panamá, Extensión Universitaria de Soná, Facultad de Ciencias Naturales Exactas y Tecnología, Panamá.

johana-e.castillo@up.ac.pa, https://orcid.org/0000-0003-4911-9507

DOI https://doi.org/10.48204/j.saberes.v6n2.a4077

Recibido: 14-8-2022 , Aceptado: 16-1-2023

RESUMEN

El objetivo de este artículo es resaltar lo cautivador y trascendente que es el teorema de Pitágoras, además de lo llamativo y hermoso que resulta ir más allá de verificar que se cumple solo para cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo; y que se deje de percibir como una simple fórmula que se recita de forma mecánica y fría. Se presentan dos famosas demostraciones de este teorema, luego se amplía este teorema para triángulos equiláteros, hexágonos regulares y semicírculos hasta llegar a generalizarlo para todo polígono regular.

Palabras Clave: Teorema de Pitágoras, polígonos regulares, área, ampliación, demostraciones

ABSTRACT

The objective of this article is to highlight how captivating and transcendent the Pythagorean theorem is, as well as, how striking and beautiful it is to go beyond verifying that it is true only for squares built on the sides of a right triangle; and that, it ceases to be perceived as a simple formula that is recited mechanically and coldly. Two famous proofs of this theorem are presented, then this theorem is extended to equilateral triangles, regular hexagons, and semicircles until it is generalized to all regular polygons.

Keywords: Pythagorean theorem, regular polygons, área, expansión, proofs

INTRODUCCIÓN

Sin duda alguna, la primera aproximación que tiene cualquier persona con la palabra teorema se da con el teorema de Pitágoras. Es más, nos atreveríamos a decir que cualquier egresado de la educación básica general puede recordar el nombre de este teorema, aunque en sí, no recuerde la relación matemática que este establece entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo.

De acuerdo con Guzmán y Ruiz, (2024) existen diferentes documentos de las antiguas civilizaciones prehelénicas de Babilonia, Egipto, India y China donde se puede observar que el teorema de Pitágoras fue conocido y aplicado con bastante antelación a la escuela Pitagórica griega. La tablilla de Plimpton 322 que se remonta al 1900 y 1600 a.C., procedentes de Mesopotamia, muestran importantes evidencias de que los babilonios conocían el teorema de Pitágoras, en palabras de (Robson, 2001 citado por Guzmán y Ruiz, 2014) se puede calificar a Plimpton 322 como una de las primeras manifestaciones de matemáticas avanzadas que se conserva donde se obtienen resultados numéricos concretos para los lados de un triángulo rectángulo.

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2953-321X
Acceso Abierto. Disponible en:
https://revistas.up.ac.pa/index.php/saberes_apudep
Vol.6, No.2
Julio- Diciembre 2023
pp. 8-26

Como señala Angulo y Moreno, (2014) en un examen arqueológico realizado en el pasado siglo de las tablillas de arcilla encontradas en Mesopotamia, pertenecientes a las civilizaciones que se desarrollaron entre los ríos Tigris y Éufrates, ha revelado que los antiguos babilonios conocían aspectos del teorema, más de mil años antes que el propio Pitágoras. Sin embargo, se le atribuye a Pitágoras su descubrimiento, ya que, fue el primero en proporcionar una demostración lógica del Teorema, lo cual hizo que el teorema pasara a la historia con su nombre.

Una aproximación a la biografía de Pitágoras de Samos

Aunque describir con exactitud la vida de Pitágoras no es una tarea fácil, se puede intentar, basándose en diferentes testimonios que proporcionan un retrato de este famoso personaje de la historia.

De acuerdo a Cañas-Quirós, (2008) Pitágoras nació en la isla de Samos alrededor del 570 a. C. fue hijo de Mnesarco, un tallista grabador de piedras preciosas que, según la costumbre griega, le tuvo que haber transmitido el oficio. Cerca del 532 huyó de la tiranía de su gobernante, Polícrates. Más tarde se estableció en Crotona, ciudad de la Magna Grecia ubicada al sur de Italia. Se dice que fue un personaje poco común y que consiguió gracias a su elocuencia influir sobre los gobernantes y sobre los jóvenes tanto hombres como mujeres. Así, logró fundar una escuela con intereses religiosos y filosóficos, cuyos adeptos se hicieron llamar Pitagóricos.

A pesar de que el Álgebra tiene sus orígenes en épocas mucho más antiguas a la que vivió Pitágoras, tal como lo evidencian algunos papiros egipcios, según Del Sol, (2012) la escuela pitagórica fue la encargada de plantear y resolver distintos problemas geométricos mediante cálculos algebraicos, logrando perfeccionar considerablemente la Aritmética y el Álgebra.

Demostraciones del Teorema de Pitágoras

Antes de presentar algunas demostraciones del Teorema de Pitágoras, es conveniente hacer el enunciado de este, dicho con palabras de García, (2010):

Teorema 1: En todo triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre las longitudes de los catetos.

Este teorema, que como hemos visto, ha ocupado un lugar importante en diferentes civilizaciones y que no por el gusto permanece en el recuerdo de cualquier estudiante, ha despertado el interés a través de la historia de muchísimos personajes destacados por realizar una demostración del mismo. En la opinión de (Ruiz, 2016 como se citó en Guachiac, 2018) existen muchas demostraciones del Teorema de Pitágoras quizás más que ningún otro teorema en Matemática. A continuación, presentamos algunas de las demostraciones.

Demostración de Euclides. Esta demostración es de tipo geométrica, basada en la comparación de áreas, muy conocida como la figura del molinillo presentada por Barrantes et al (2021).

Procedimiento Inicial:

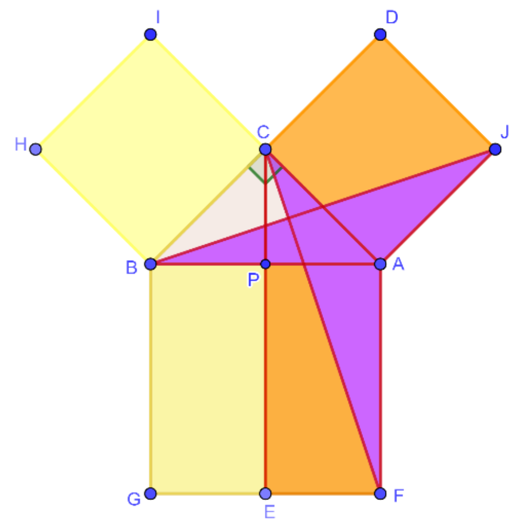
1. Se construye el triángulo rectángulo ABC.
2. Se construyen cuadrados sobre todos sus lados.
3. Se construye una recta perpendicular a la hipotenusa por el punto C, la intersección de esta recta con el segmento $\overline{AB}$ se llama P y con $\overline{GF}$ se llama E.

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2953-321X
Acceso Abierto. Disponible en:
https://revistas.up.ac.pa/index.php/saberes_apudep

Vol.6, No.2
Julio- Diciembre 2023
pp. 8-26

Figura 1.

Demostración de Euclides



Demostración 1:

Tracemos los segmentos $\overline{BJ}$ y $\overline{CF}$

El $\measuredangle BAJ = \measuredangle BAC + \measuredangle CAJ$. El ángulo $\measuredangle CAJ$ es un ángulo recto, por lo que se si remplazamos tenemos: $\measuredangle BAJ = \measuredangle BAC + 90^{\circ}$ lo que implica que $\measuredangle BAJ - \measuredangle BAC = 90^{\circ}$ (1)

El $\measuredangle CAF = \measuredangle BAC + \measuredangle BAF$. El ángulo $\measuredangle BAF$ es un ángulo recto, por lo que se si remplazamos tenemos: $\measuredangle CAF = \measuredangle BAC + 90^{\circ}$ lo que implica que $\measuredangle CAF - \measuredangle BAC = 90^{\circ}$ (2)

Al igualar (1) y (2) tenemos: $\measuredangle BAJ - \measuredangle BAC = \measuredangle CAF - \measuredangle BAC$ de donde se obtiene que $\measuredangle BAJ = \measuredangle CAF$ (3).

Por otro lado, tenemos que: $\overline{CA} \cong \overline{AJ}$ y $\overline{BA} \cong \overline{AF}$ (4)

Tomando en cuenta los resultados de los puntos (3) y (4) y por el criterio $L.A.L$ se tiene que $\triangle BAJ \cong \triangle FAC$.

Como $\triangle BAJ \cong \triangle FAC$, entonces los $\triangle BAJ$ y $\triangle FAC$ tienen la misma área.

Como el $\triangle FAC$ y $\blacksquare PAFE$ comparten la misma base y se encuentran entre las mismas paralelas entonces: $2\text{A}_{\triangle}FAC = \text{A}_{\blacksquare}\text{PAFE}$

Como el $\triangle BAJ$ y $\blacksquare CDJA$ comparten la misma base y se encuentran entre las mismas paralelas entonces: $2\text{A}_{\triangle}BAJ = \text{A}_{\blacksquare}CDJA$

Como $\text{A}_{\triangle}\ BAJ = \text{A}_{\triangle}\ CAF$, entonces $2\text{A}_{\triangle}BAJ = 2\text{A}_{\triangle}CAF$.

Por lo tanto, $\text{A}_{\blacksquare}\text{PAFE} = \text{A}_{\blacksquare}\text{CDJA}$ (*)

Tracemos ahora, los segmentos $\overline{AH}$ y $\overline{CG}$

El $\measuredangle HBA = \measuredangle HBC + \measuredangle CBA$. El ángulo $\measuredangle HBC$ es un ángulo recto, por lo que se si remplazamos tenemos: $\measuredangle HBA = 90^{\circ} + \measuredangle CBA$ lo que implica que $\measuredangle HBA - \measuredangle CBA = 90^{\circ}$(5)

El $\measuredangle CBG = \measuredangle CBA + \measuredangle ABG$. El ángulo $\measuredangle ABG$ es un ángulo recto, por lo que se si remplazamos tenemos: $\measuredangle CBG = \measuredangle CBA + 90^{\circ}$ lo que implica que $\measuredangle CBG - \measuredangle CBA = 90^{\circ}$ (6)

Al igualar (5) y (6) tenemos: $\measuredangle HBA - \measuredangle CBA = \measuredangle CBG - \measuredangle CBA$ de donde se obtiene que $\measuredangle HBA = \measuredangle CBG$ (7)

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2953-321X
Acceso Abierto. Disponible en: https://revistas.up.ac.pa/index.php/saberes_apudep
Vol.6, No.2
Julio- Diciembre 2023
pp. 8-26

Por otro lado, tenemos que: $\overline{BH} \cong \overline{BC}$ y $\overline{BA} \cong \overline{BG}$ (8)

Tomando en cuenta los resultados de los puntos (7) y (8) y por el criterio $L.A.L$ se tiene que $\triangle HBA \cong \triangle CBG$.

Como $\triangle HBA \cong \triangle CBG$, entonces los $\triangle HBA$ y $\triangle CBG$ poseen la misma área.

Como el $\triangle CBG$ y $\blacksquare PBGE$ comparten la misma base y se encuentran entre las mismas paralelas entonces: $2\mathrm{A}_{\triangle}CBG = \mathrm{A}_{\blacksquare}\mathrm{PBGE}$

Como el $\triangle HBA$ y $\blacksquare HICB$ comparten la misma base y se encuentran entre las mismas paralelas entonces: $2\mathrm{A}_{\triangle}HBA = \mathrm{A}_{\blacksquare}HICB$

Como $\mathrm{A}_{\triangle}\ HBA = \mathrm{A}_{\triangle}\ CBG$, entonces $2\mathrm{A}_{\triangle}HBA = 2\mathrm{A}_{\triangle}CBG$.

Por lo tanto, $\mathrm{A}_{\blacksquare}\mathrm{HICB} = \mathrm{A}_{\blacksquare}\mathrm{PBGE}$ (**)

Luego, $\mathrm{A}_{\blacksquare}\mathrm{BAFG} = \mathrm{A}_{\blacksquare}\mathrm{PAFE} + \mathrm{A}_{\blacksquare}\mathrm{PBGE}$. Si sustituimos los resultados obtenidos en (*) y (**) se tiene que: $\mathrm{A}_{\blacksquare}\mathrm{BAFG} = \mathrm{A}_{\blacksquare}\mathrm{CDJA} + \mathrm{A}_{\blacksquare}\mathrm{HICB}$

Con lo que queda demostrado el teorema de Pitágoras.

Continuando con las demostraciones del Teorema de Pitágoras mostramos ahora una demostración algebraica presentada por Cruz-Avilés, (2016).

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2953-321X
Acceso Abierto. Disponible en: https://revistas.up.ac.pa/index.php/saberes_apudep
Vol.6, No.2
Julio- Diciembre 2023
pp. 8-26

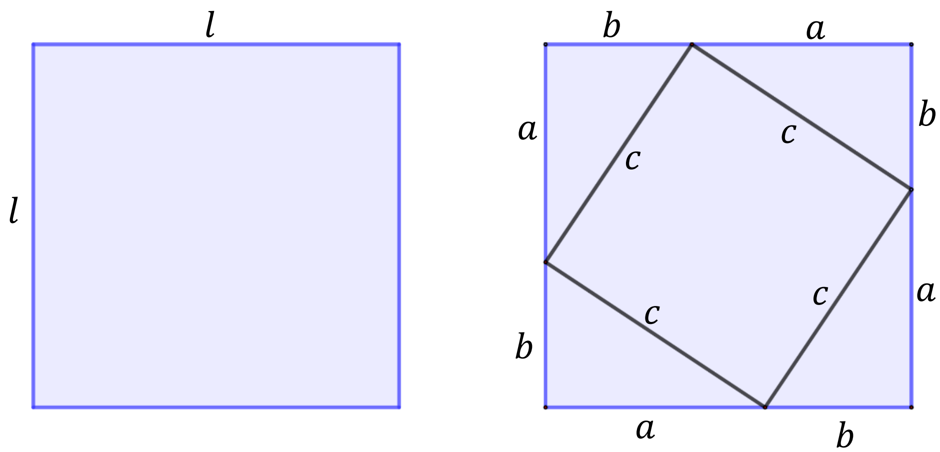
Demostración 2:

Partimos tomando el área de un cuadrado de lado l.

Ahora se divide el área del cuadrado l en un cuadrado de lado c y en cuatro triángulos rectángulos de lados a y b respectivamente.

Figura 2.

Momentos de la demostración presentada por Cruz-Avilés



El área del cuadrado de lado l es $A = l^2$. Esta misma área puede ser escrita del siguiente modo, $A = l^2 = c^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right)$.

Simplificando esta ecuación se obtiene $l^2 = c^2 + 2ab$ (1)

Por otro lado, el área del cuadrado de lado l también puede ser representada como: $A = l^2 = (a + b)^2$ (2).

De los puntos 1 y 2 podemos establecer que: $(a + b)^2 = c^2 + 2ab$ (3)

Desarrollando el miembro izquierdo de la ecuación 3 obtenemos:

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2953-321X
Acceso Abierto. Disponible en:
https://revistas.up.ac.pa/index.php/saberes_apudep
Vol.6, No.2
Julio- Diciembre 2023
pp. 8-26

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Con lo que queda demostrado el Teorema de Pitágoras.

Hacia una ampliación del Teorema de Pitágoras

Después de haber demostrado el teorema de Pitágoras a partir de este momento podemos utilizar su resultado, es decir: $a^2 + b^2 = c^2$.

Este enigmático teorema como plantea López et al (2018) puede ser ampliado a los casos en los que los lados del triángulo no son lados de cuadrados sino lados de otras figuras geométricas. Esto quiere decir que, la propiedad pitagórica no es válida únicamente para los cuadrados de lados iguales a los catetos y la hipotenusa, sino para cualquier polígono construido sobre los lados del triángulo rectángulo, siempre que los tres polígonos, así construidos, sean semejantes entre sí.
Para extender esta ampliación al caso de triángulos se presenta el siguiente teorema enunciado y demostrado por Barreto, (2009).

Teorema 2: En todo triángulo rectángulo, el área del triángulo equilátero construido sobre la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre las longitudes de los catetos.

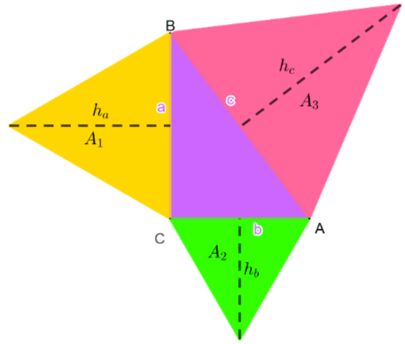
Demostración:

Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo de hipotenusa c y catetos a, b. Sobre cada lado de este triángulo se han trazado sendos triángulos equiláteros con alturas h_c, h_a y h_b respectivamente. Como se muestra en la figura 3.

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2953-321X
Acceso Abierto. Disponible en:
https://revistas.up.ac.pa/index.php/saberes_apudep
Vol.6, No.2
Julio- Diciembre 2023
pp. 8-26

Figura 3.

Ampliación a triángulos equiláteros



Si A_3 representa el área del triángulo construido sobre la hipotenusa y A_1 y A_2 las áreas de los triángulos construidos sobre los catetos, entonces:

$$A_1 = \frac{ah_a}{2} = \frac{a\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2}}{2} = \frac{a\sqrt{\frac{3}{4}a^2}}{2} = \frac{\frac{a^2}{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_2 = \frac{bh_b}{2} = \frac{b\sqrt{b^2 - \frac{1}{4}b^2}}{2} = \frac{b\sqrt{\frac{3}{4}b^2}}{2} = \frac{\frac{b^2}{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_3 = \frac{ch_c}{2} = \frac{c\sqrt{c^2 - \frac{1}{4}c^2}}{2} = \frac{c\sqrt{\frac{3}{4}c^2}}{2} = \frac{\frac{c^2}{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$$

Si sumamos las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre los catetos tendríamos que:

$$A_1 + A_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_1 + A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2)$$

Del teorema 1, sabemos que $a^2 + b^2 = c^2$. Por lo tanto, las sumas de las áreas anteriores quedarían así: $A_1 + A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$, cuyo resultado es el área del triángulo equilátero construido sobre la hipotenusa del triángulo. Que es lo que se quería demostrar.

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2953-321X
Acceso Abierto. Disponible en:
https://revistas.up.ac.pa/index.php/saberes_apudep
Vol.6, No.2
Julio- Diciembre 2023
pp. 8-26

Continuando con la ampliación del teorema de Pitágoras verificaremos si este se cumple cuando sobre los lados del triángulo rectángulo se construyen hexágonos regulares. Para el desarrollo de esta parte debemos recordar que es un polígono regular que, a juicio de Ramírez, (2011) es aquel que es equilátero y equiángulo, el ángulo central del polígono regular es el formado por dos vértices consecutivos del polígono y el centro del polígono, al segmento trazado perpendicularmente desde el centro del polígono a cada uno de sus lados se llama apotema y su longitud corresponde a la altura de cada uno de los triángulos en que puede descomponerse el polígono regular. Para calcular el área de un polígono regular utilizaremos la fórmula deducida por Vílchez, (2015) $A = \frac{nl^2}{4} \tan\left[\frac{\pi(n-2)}{2n}\right]$, donde l representa la longitud del lado del polígono regular y n el número de lados. Si se utiliza esta fórmula para el caso particular del hexágono tendríamos $A = \frac{3\sqrt{3}}{2} l^2$.

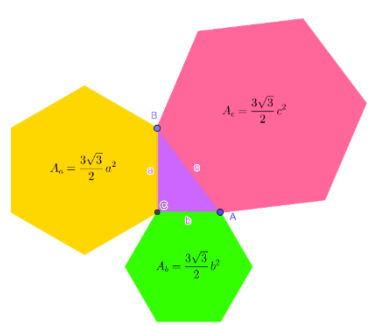
Teorema 3: En todo triángulo rectángulo, el área del hexágono regular construido sobre la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los hexágonos regulares construidos sobre las longitudes de los catetos.

Demostración:

Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo de hipotenusa c y catetos a, b. Sobre cada lado de este triángulo se han trazado hexágonos regulares. Como se muestra en la figura 4

Figura 4.

Ampliación a hexágonos regulares



Si A_c representa el área del triángulo construido sobre la hipotenusa y A_a y A_b las áreas de los triángulos construidos sobre los catetos, entonces:

$$A_a = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 \quad ; \quad A_b = \frac{3\sqrt{3}}{2}b^2 \quad ; \quad A_c = \frac{3\sqrt{3}}{2}c^2$$

Si sumamos las áreas de los hexágonos regulares construidos sobre los catetos tendríamos que:

$$A_a + A_b = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}b^2$$

$$A_a + A_b = \frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2)$$

Como se ha demostrado anteriormente, $a^2 + b^2 = c^2$, ya que, a y b son los catetos de un triángulo rectángulo. Si esto lo reemplazamos en la fórmula anterior se obtiene que $A_a + A_b = \frac{3\sqrt{3}}{2}c^2$ que es exactamente el área del hexágono regular construido sobre la hipotenusa. Que es lo que buscábamos demostrar.

Si continuamos aumentando la cantidad de lados de los polígonos regulares que se construyen sobre los lados del triángulo rectángulo llegará el momento que se alcanzará el círculo. Tal como lo afirma Vásquez, (2012) el círculo es una extensión de los polígonos regulares, cuando el número de lados se extiende hacia el infinito.

Teorema 4: En todo triángulo rectángulo, el área del semicírculo construido teniendo como diámetro la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los semicírculos construidos teniendo como diámetros las longitudes de los catetos.

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2953-321X

Acceso Abierto. Disponible en:
https://revistas.up.ac.pa/index.php/saberes_apudep

Vol.6, No.2
Julio- Diciembre 2023

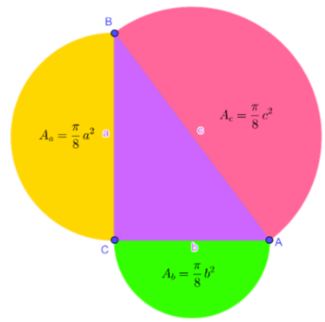
pp. 8-26

Demostración:

Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo de hipotenusa c y catetos a, b. Sobre cada lado de este triángulo se han trazado semicírculos como se muestra en la figura siguiente.

Figura 5.

Ampliación a semicírculos



Si A_c representa el área del triángulo construido sobre la hipotenusa y A_a y A_b las áreas de los triángulos construidos sobre los catetos, entonces:

$$A_a = \frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} = \frac{\frac{\pi a^2}{4}}{2} = \frac{\pi}{8}a^2$$

Siguiendo un procedimiento similar se obtiene que: $A_b = \frac{\pi}{8}b^2$ y $A_c = \frac{\pi}{8}c^2$

Al sumar A_a y A_b se tiene:

$$A_a + A_b = \frac{\pi}{8}a^2 + \frac{\pi}{8}b^2$$

$$A_a + A_b = \frac{\pi}{8}(a^2 + b^2)$$

Nuevamente como a y b son los catetos de un triángulo rectángulo se tiene que $a^2 + b^2 = c^2$, por lo que: $A_a + A_b = \frac{\pi}{8}(a^2 + b^2) = \frac{\pi}{8}c^2$ que es justamente el área del semicírculo construido sobre la hipotenusa como diámetro. Con lo que queda demostrado el teorema.

Hasta el momento se han demostrado algunos teoremas en los que se cumple el teorema de Pitágoras para ciertos polígonos regulares construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo. Sin embargo, antes de llegar a esto debemos realizar la demostración de un importante teorema que es de gran utilidad en próximas demostraciones.

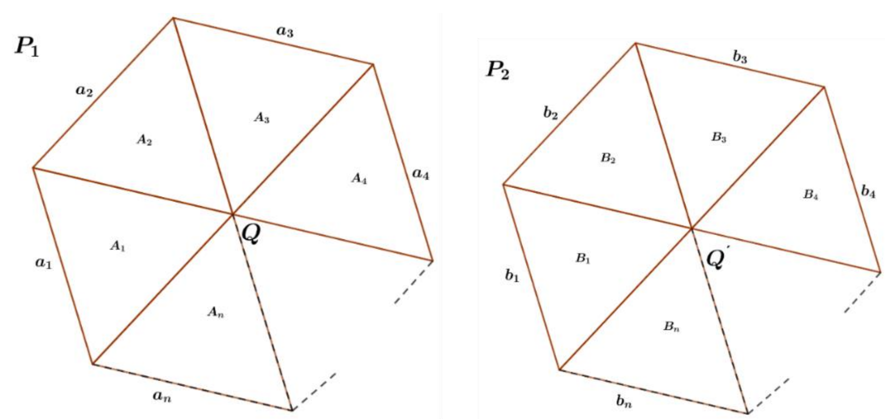
Teorema 5: La razón que hay entre las áreas de dos polígonos semejantes es el cuadrado de su razón de semejanza.

Demostración:

Consideremos los polígonos P_1 y P_2 como se muestran en la siguiente figura.

Figura 6.

Momentos de la demostración



En ellos, Q y Q' son puntos interiores homólogos (el objetivo es que el área de cada polígono quede adecuadamente dividida en triángulos mediante puntos interiores, vértices comunes de triángulos, que sean homólogos de un polígono a otro).

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ y $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ son las áreas de los triángulos que se generan al unir Q y Q' con sus respectivos vértices.

Llamaremos A y B a las áreas de los polígonos P_1 y P_2 respectivamente. Sea r_L la razón de semejanza que hay entre ellos y r_A la razón entre sus áreas.

Se tiene que:

$A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n$, $B = B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_n$, $r_L = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$

Por la razón de semejanza que existe entre los polígonos P_1 y P_2, y por ser Q y Q' homólogos, entonces cada triángulo del polígono P_1 es semejante a su correspondiente triángulo del polígono P_2, de modo que:

$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3} = \cdots = \frac{A_n}{B_n} = (r_L)^2$, esto basado en que la razón que hay entre las áreas de dos triángulos semejantes es el cuadrado de la razón de semejanza.

De aquí se obtiene que $A_1 = B_1(r_L)^2$, $A_2 = B_2(r_L)^2$, $A_3 = B_3(r_L)^2$, $A_n = B_n(r_L)^2$ (1)

Ahora consideremos la razón que existe entre las áreas de los polígonos P_1 y P_2

$$r_A = \frac{A}{B} = \frac{A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n}{B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_n}$$

$$r_A = \frac{B_1(r_L)^2 + B_2(r_L)^2 + B_3(r_L)^2 + \dots + B_n(r_L)^2}{B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_n}$$ reemplazando los valores obtenidos en (1)

$$r_A = \frac{(B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_n)(r_L)^2}{B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_n}$$

REVISTA SABERES APUDEP
ISSN L 2953-321X
Acceso Abierto. Disponible en:
https://revistas.up.ac.pa/index.php/saberes_apudep
Vol.6, No.2
Julio- Diciembre 2023
pp. 8-26

$$r_A = \frac{B(r_L)^2}{B}$$

$$r_A = (r_L)^2$$

Con lo que queda demostrado que: la razón que hay entre las áreas de dos polígonos semejantes es el cuadrado de su razón de semejanza.

Ha llegado el momento de comprobar si el teorema de Pitágoras se cumple para el caso de cualquier polígono regular construido sobre sus lados. Para esta demostración se presenta la realizada por Zárate, (1996).

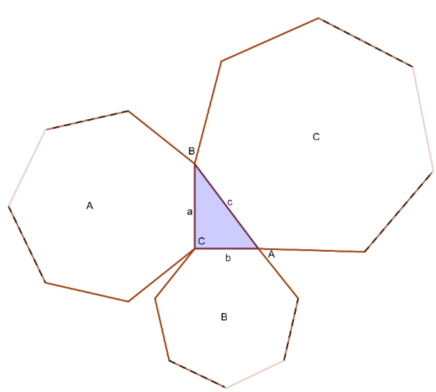
Teorema 6: Si sobre los lados de un triángulo rectángulo se trazan sendas figuras semejantes de modo que dichos lados sean homólogos en esa relación de semejanza, entonces la suma de las áreas de dichas figuras trazadas sobre los catetos es igual al área de la figura trazada sobre la hipotenusa.

Demostración:

Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo de hipotenusa c y catetos a, b. Sean A, B y C las áreas de las tres figuras semejantes construidas, respectivamente sobre a, b y c y estos lados son homólogos en esa relación de semejanza. Como se muestra en la figura siguiente.

Figura 7.

Ampliación a polígonos regulares



Aplicando el teorema 5, tenemos que:

$$\frac{A}{C} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} \text{ y } \frac{B}{C} = \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{b^2}{c^2}$$

Por lo tanto, $A = C\left(\frac{a^2}{c^2}\right)$ y $B = C\left(\frac{b^2}{c^2}\right)$

Si sumamos A y B tenemos:

$$A + B = C\left(\frac{a^2}{c^2}\right) + C\left(\frac{b^2}{c^2}\right)$$

$$A + B = C\left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}\right)$$

$$A + B = C\left(\frac{a^2 + b^2}{c^2}\right)$$

Por otro lado, el $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo y por el teorema 1 sabemos que $a^2 + b^2 = c^2$, así:

$$A + B = C\left(\frac{c^2}{c^2}\right)$$

$$A + B = C(1)$$

$$A + B = C$$

Con lo que hemos demostrado que el teorema de Pitágoras se cumple para todo polígono regular semejante construido sobre los lados de un triángulo rectángulo.

CONCLUSIÓN

Es indudable la importancia y trascendencia que ha tenido el teorema de Pitágoras a través de la historia. Incluso, como se ha mostrado en este artículo, para demostrar la veracidad de su generalización se ha recurrido a su versión más conocida en la que se construyen cuadrados sobre los lados del triángulo rectángulo. Es por ello, que consideramos necesario y de gran relevancia que la ampliación de este teorema sea objeto de estudio en los diferentes niveles educativos, ya que, representa una forma llamativa y motivadora de dirigir al estudiante hacia la demostración Matemática, conduciéndolo e impulsándolo a ir más allá de lo que le presenta el docente en el aula de clases.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Angulo Moreno, J. (2014). Catálogo de videos sobre historia de las matemáticas. Un ámbito para la reflexión docente.

Barrantes, M. C., Zamora, V., & Barrantes, M. (2021). Las demostraciones dinámicas del Teorema de Pitágoras. Revista de Educación Matemática, 36(1), 27-42.

Barreto, J. C. (2009). Otras deducciones o extensiones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico. Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 70, 35-51.

Cañas-Quirós, R. (2008). Pitágoras y los pitagóricos. Acta Académica, 43(Noviembre), 159-176.

Cruz-Avilés, A., Ortiz Domínguez, M., Cruz Trejo, R., Garrido Hernández, V. J., Rosales Xicoténcatl, C. G., & Abreu Quijano, M. Ángel. (2016). Demostración algebraica del teorema de Pitágoras. Ingenio y Conciencia Boletín Científico De La Escuela Superior Ciudad Sahagún, 3(6). https://doi.org/10.29057/ess.v3i6.352

Del Sol, C. L. R. M. (2012). Algunos matemáticos y sus principales aportes (Primera parte). Revista Conrado, 8(33). 56-62

García, J. C. B. (2010). Deducción y extensión más general del Teorema de Pitágoras. Números, 75.

Guachiac y Guachiac, M.A. (2018). Geogebra y su incidencia en el aprendizaje del teorema de Pitágoras. [Tesis de grado]. Universidad Rafael Landívar.

Guzmán, M. F., & Ruiz, C. J. S. (2014). Matemáticas y competencias básicas a partir de la tablilla Plimpton 322 (1). Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, (77), 31-40.

López, M. B., Masot, M. C. B., Rodríguez, V. Z., & López, Á. N. M. (2018). El Teorema de Pitágoras, un problema abierto. UNIÓN-REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 14(54).

Ramírez Chaparro, R. (2011). Construcción de polígonos regulares. [Tesis de fin de master]. Universidad Nacional de Colombia.

Vásquez Bernal, M. V. (2012). Una ampliación al teorema de Pitágoras. Revista de Educación Matemática, 37(3), 3-22.

Vílchez Quesada, E. (2015). Propuesta para hallar el área de un polígono regular utilizando El Geómetra (The Geometer's Sketchpad 3.0).

Zárate Salas, E. (1996). Generalización del teorema de Pitágoras. Revista de Educación Matemática, 8(2), 127-144