Tecnociencia 2019, Vol. 21, N° 2: 31-51
julio-diciembre 2019

PRUEBA ELEMENTAL DEL TEOREMA DE LOS NÚMEROS PRIMOS

Julio E. Trujillo G.
Universidad de Panamá, Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología, Departamento de Matemática
e-mail: julio.trujillo@up.ac.pa

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es probar el teorema de los números primos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\log x}{x}=1$$

En particular se analizará la prueba de Levinson, N. 1969 y como complemento las otras demostraciones que se encuentran como referencias.

El paso más importante es la demostración de la fórmula asintótica de Selberg, que establece

$$\psi(x)\log x+\sum_{n\leq x}\Lambda(n)\psi\left(\frac{x}{n}\right)=2x\log x+O(x)$$

Por supuesto esto es una consecuencia inmediata del Teorema de los Números Primos. La genialidad de la demostración de esta fórmula asintótica es la que es completamente elemental.

PALABRAS CLAVES

Teorema de los Números Primos, Fórmulas asintóticas de Selberg, Teorema de Tonelli.

AN ELMENTARY PROOF OF THE PRIME NUMBER THEOREM

ABSTRACT

The objective of this paper is to prove the prime numbers theorem

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\log x}{x}=1$$

In particular, the proof of (Levinson, N. 1969) and as a complement to the other demonstrations found as references will be analyzed.

The most important step is the demonstration of Selberg's asymptotic formula, which establishes

$$\psi(x)\log x+\sum_{n\le x}\Lambda(n)\psi\left(\frac{x}{n}\right)=2x\log x+O(x)$$

Of course this is an immediate consequence of the Prime Numbers Theorem. The genius of the demonstration of this asymptotic formula is that it is completely elementary.

KEYWORDS

Prime number theorem, Selberg's asymptotic formula, Tonelli’s theorem.

INTRODUCCIÓN

El Teorema de los Números Primos (TNP) fue enunciado por primera vez a finales del siglo XVIII por Carl Friedrich Gauss y Adrien Marie Legendre ambos conjeturaron que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\log x}{x}=1$$

El primer intento de su demostración fue por el matemático ruso Pafnuty Lvóvich Chebyshev, en dicho trabajo demostró que si se hace aproximadamente a la función $\pi(x)$ del orden $\frac{x}{\log x^N}$ con Nun entero positivo muy grande previamente fijado, entonces la aproximación sería $\int_2^x \frac{dt}{\log t}$. Además, se deduce que si el límite de la conjetura de los números primos existe debe ser igual a 1.

En 1859, para entrar en la Academia de las Ciencias de Berlín, el alemán Bernhard Riemann redactó sólo ocho páginas, pero en esas páginas se encontraba el camino para llegar al teorema de los Números Primos. La esencia de este documento es que Riemann conecto la función $\pi(x)$ con la función zeta de Euler

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Pero el salto de gigante que hizo Riemann, es que considera como una función de variable compleja. Además, una serie de afirmaciones sobre el problema de la demostración del TNP que investigadores posteriores se encargarían de demostrar. La sorpresa ocurrió antes del siglo XX, cuando el francés Jacques Salomon Hadamard y el belga Charles Jean Étienne Gustave Nicolas de la Vallée Poussin, quienes fueron los que demostraron el teorema de forma independiente. Para más información histórica, ver (Trujillo, 2016).

1. Plan de la demostración

La clave de la demostración elemental del Teorema de los Números Primos (TNP), es la fórmula asintótica de Selberg, que establece

$$\psi(x)\log x + \sum_{n \leq x} \Lambda(n)\psi\left(\frac{x}{n}\right) = 2x\log x + O(x) \qquad (1)$$

De esta fórmula se deduce el TNP. El primer paso es expresar la fórmula (1), de una manera más conveniente que involucre $V(\xi) = e^{-\xi}\psi(e^{\xi}) - 1$.

La fórmula (1) tiene como consecuencia la desigualdad integral

$$\xi^2|V(\xi)| \leq 2\int_0^{\xi}\int_0^{\tau}|V(\eta)|\, d\tau\, d\eta + O(\xi)$$

Cuando $\xi \to \infty$ entonces $V(\xi) \to 0$, esto último es equivalente a demostrar el TNP.

Si definimos $\mathcal{S} = \limsup_{\xi \to \infty} |V(\xi)|$, entonces el TNP es equivalente demostrar que $\mathcal{S} = 0$. Esto se demuestra suponiendo que $\mathcal{S} > 0$ para llegar así a una contracción. De la definición de $\mathcal{S}$ obtenemos que

$$|V(\xi)| \leq \mathcal{S} + h(\xi) \qquad (2)$$

Donde $h(\xi) \to 0$ cuando $\xi \to 0$. Si $\mathcal{S} > 0$ de (1) y (2) obtenemos que

$$|V(\xi)| \leq \mathcal{S}' + f(\xi) \qquad (3)$$

Con $0 < \mathcal{S}' < \mathcal{S}$ y $f(\xi) \to 0$, cuando $\xi \to \infty$. Si hacemos que $\xi \to \infty$ en (3) obtenemos que $\mathcal{S} \leq \mathcal{S}'$ y esto es una contradicción.

2. Algunas fórmulas asintóticas de Selberg

La siguiente demostración es producto del trabajo de Tatuzawa e Iseki en 1951.

Teorema 1. Sea $F: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) y $G(x) = \log x \sum_{n \leq x} F\left(\frac{x}{n}\right)$.
Entonces $F(x)\log x + \sum_{n \leq x} F\left(\frac{x}{n}\right) \Lambda(n) = \sum_{d \leq x} \mu(d) G\left(\frac{x}{d}\right)$.

Demostración

Podemos expresar $F(x)\log x$ como,

$$F(x)\log x = \sum_{n \leq x} \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor F\left(\frac{x}{n}\right) \log\frac{x}{n} = \sum_{n \leq x} F\left(\frac{x}{n}\right) \log\frac{x}{n} \sum_{d|n} \mu(d) \qquad (4)$$

Utilizando la identidad

$$\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \log\frac{n}{d}$$

Obtenemos

$$\sum_{n\leq x} F\left(\frac{x}{n}\right) \Lambda(n) = \sum_{n\leq x} F\left(\frac{x}{n}\right) \sum_{d|n} \mu(d) \log\frac{n}{d} \qquad (5)$$

Sumando (4) y (5), obtenemos

$$F(x)\log x + \sum_{n\leq x} F\left(\frac{x}{n}\right) \Lambda(n) = \sum_{n\leq x} F\left(\frac{x}{n}\right) \sum_{(d|n)} \mu(d) \left\{\log\frac{x}{n} + \log\frac{n}{d}\right\}$$

$$= \sum_{n\leq x} F\left(\frac{x}{n}\right) \sum_{d|n} \mu(d) \log\frac{x}{d}$$

$$= \sum_{n\leq x} \sum_{d|n} F\left(\frac{x}{n}\right) \mu(d) \log\frac{x}{d}$$

Haciendo $n = qd$ obtenemos

$$\sum_{n\leq x} \sum_{d|n} F\left(\frac{x}{n}\right) \mu(d) \log\frac{x}{d} = \sum_{d\leq x} \mu(d) \log\frac{x}{d} \sum_{q\leq \frac{x}{d}} F\left(\frac{x}{qd}\right)$$

Identificando x como x/d en la función G definida al principio y obtenemos

$$\sum_{d\leq x} \mu(d) \log\frac{x}{d} \sum_{q\leq \frac{x}{d}} F\left(\frac{x}{qd}\right) = \sum_{d\leq x} \mu(d)\, G\left(\frac{x}{d}\right)$$

Lema 1. Para todo $x \geq 1$ tenemos que

$$\sum_{n\leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) = x\log x - x + O(\log x)$$

Lema 2. Para todo $x \geq 1$ tenemos que

$$\sum_{n\leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \log x + O(1)$$

Teorema 2. (Fórmula asintótica de Selberg) Para $x > 0$ obtenemos que

$$\psi(x) \log x + \sum_{n \le x} \Lambda(n) \psi\left(\frac{x}{n}\right) = 2x \log x + O(x)$$

Demostración
Usando el teorema 1, en la función $F_1(x) = \psi(x)$ y también en $F_2(x) = x - \gamma - 1$, donde γ es la constante de Euler-Mascheroni. Utilizando a F_1 tenemos

$$G_1(x) = \log x \sum_{n \le x} F_1\left(\frac{x}{n}\right) = \log x \sum_{n \le x} \psi\left(\frac{x}{n}\right)$$

Por el lema 1, obtenemos que

$$G_1(x) = \log x \left(x \log x - x + O(\log x)\right) = x \log^2 x - x \log x + O(\log^2 x)$$

y con respecto a F_2, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} G_2(x) &= x \log x \, (\log x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right) - (\gamma + 1) \log x \left(x + O(1)\right) \\ &= x \log^2 x - x \log x + O(\log x) \end{aligned}$$

Restando las funciones G_1 y G_2, obtenemos que $G_1(x) - G_2(x) = O(\log^2 x)$. Tomaremos la estimación débil $G_1(x) - G_2(x) = O\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$. Aplicando el teorema 1 en las funciones F_1, F_2 y restando las dos relaciones resultantes, obtenemos

$$\sum_{d \le x} \mu(d) \left\{G_1\left(\frac{x}{d}\right) - G_2\left(\frac{x}{d}\right)\right\} = O\left(\sqrt{x} \sum_{d \le x} \frac{1}{\sqrt{d}}\right) = O(x)$$

Considerando la diferencia

$$F_1(x)\log x + \sum_{n\le x} F_1\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) - \left\{F_2(x)\log x + \sum_{n\le x} F_2\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n)\right\} =$$
$$(\psi(x) - x - \gamma + 1)\log x + \sum_{n\le x}\left(\psi\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} + \gamma + 1\right)\Lambda(n) = O(x)$$

Ordenando los términos y utilizando el lema 2, resulta lo siguiente

$$\psi(x)\log x + \sum_{n\le x}\psi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n)$$
$$= (x - \gamma - 1)\log x + \sum_{n\le x}\left(\frac{x}{n} - \gamma - 1\right)\Lambda(n) + O(x)$$
$$= 2x\log x + O(x)$$

El siguiente teorema recoge cuatro ecuaciones que son lógicamente equivalentes.

Teorema 3.

$$(i)\quad \vartheta(x)\log x + \sum_{p\le x}\vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\log p = 2x\log x + O(x)$$

$$(ii)\quad \psi(x)\log x + \sum_{n\le x}\psi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) = 2x\log x + O(x)$$

$$(iii)\quad \sum_{n\le x}\Lambda(n)\log n + \sum_{\substack{m,n\\ mn\le x}}\Lambda(m)\Lambda(n) = 2x\log x + O(x)$$

$$(iv)\quad \psi(x)\log x + \sum_{\substack{m,n\\ mn\le x}}\Lambda(m)\Lambda(n) = 2x\log x + O(x)$$

En lo que sigue vamos a definir una función auxiliar:

$$\mathcal{T}(x) = \sum_{n\leq x}\sum_{m|n}\mu(m)\log^2\frac{x}{m}, \qquad para\; x > 1$$

Teorema 4. Para x suficientemente grande, tenemos que

$$\mathcal{T}(x) = \sum_{n\leq x}\Lambda(n)\log n + \sum_{\substack{m,n\\ mn\leq x}}\Lambda(m)\Lambda(n) + O(x)$$

Demostración
Notemos que si $n = 1$, entonces

$$\sum_{m|1}\mu(m)\log^2\frac{x}{m} = \log^2 x$$

Para $n > 1$, obtenemos

$$\sum_{m|n}\mu(m)\log^2\frac{x}{m} = \sum_{m|n}\mu(m)(\log^2 m - 2\log x\log m + \log^2 m)$$

$$= \sum_{m|n}\mu(m)\log^2 m - 2\log x\sum_{m|n}\log m \qquad (6)$$

Además, tenemos que

$$\sum_{m|n}\mu(m)\log m = -\Lambda(m) \qquad (7)$$

Por otro lado, observamos que

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{h,k\\hk=n}} \Lambda(h)\Lambda(k) &= \sum_{h|n} \Lambda(h)\Lambda\left(\frac{n}{h}\right)\\ &= -\sum_{h|n} \Lambda(h) \sum_{m|\frac{n}{k}} \mu(m)\log m\\ &= -\sum_{m|n} \mu(m)\log m \log n\\ &\quad + \sum_{m|n} \mu(m)\log^2 m\\ &= \Lambda(n)\log n\\ &\quad + \sum_{m|n} \mu(m)\log^2 m \qquad (8)\end{aligned}$$

Aplicando (6), (7) y (8) a la función $\mathcal{T}$, se demuestra que

$$\mathcal{T}(x) - \left(\sum_{n\leq x} \Lambda(n)\log n + \sum_{\substack{m,n\\mn\leq x}} \Lambda(m)\Lambda(n)\right) = O(x)$$

Otro resultado importante es el siguiente

Teorema 5. Sea $k > 0$ un exponente fijo y con x suficientemente grande, tenemos que

$$\sum_{n\leq x} \log^{\mathrm{k}} \frac{x}{n} = O_k(x)$$

Demostración
Ver (Trujillo, 2016).

Teorema 6. Con x suficientemente grande, tenemos

$$\mathcal{T}(x) = 2x\log x + O(x)$$

La demostración de este resultado depende de la conexión de la función $\mathcal{T}$ con la función $\mathcal{L}$ definida de la siguiente forma: para $x > 1$ escribimos

$$\mathcal{L}(x) = \sum_{m \leq x} \frac{\mu(m)}{m} \log^2 \frac{x}{m}$$

y también del resultado del teorema 5 y las propiedades de las funciones involucradas, ver (Trujillo, 2016).

3. Proposición de suavizado

Para todo $x > 0$, consideremos $R(x) = \psi(x) - x$ y $F(x) = \psi(x) + x$. Se puede determinar que la función F es creciente, para x suficientemente grande, tenemos que $F(x) = O(x)$.

Supongamos que $x' > x'' > 0$. Además, como $\psi(x)$ es creciente, obtenemos:

$$\begin{aligned} \big||R(x')| - |R(x'')|\big| &\leq |R(x') - R(x'')| \\ &\leq |\psi(x') - \psi(x'')| + |x' - x''| = F(x') - F(x'') \end{aligned}$$

Nuestro objetivo principal es demostrar que $R(x) = O(x)$, usando las desigualdades de Selberg.

Consideremos lo siguiente

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} R\left(\frac{x}{n}\right) \Lambda(n) &= \sum_{n \leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) \Lambda(n) - x \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} \\ &= \sum_{n \leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) \Lambda(n) - x(\log x + O(1)) \\ &= \sum_{n \leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) \Lambda(n) - x \log x + O(x) \end{aligned}$$

Por el teorema 3 (ii), tenemos que

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{n\leq x} R\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) &= -\psi(x)\log x + 2x\log x + O(x) - \log x + O(x)\\ &= -\psi(x)\log x + x\log x + O(x)\end{aligned}$$

En conclusión, tenemos que

$$(\psi(x)-x)\log x + \sum_{n\leq x} R\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) = O(x)$$

y esto equivalente a

$$R(x)\log x + \sum_{n\leq x} R\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n) = O(x)$$

Para $x\leq n$, sustitutyendo x por $\frac{x}{n}$ (el índice de la sumatoria cambia de n a m) en el resultado anterior

$$R\left(\frac{x}{n}\right)\log\frac{x}{n} + \sum_{m\leq x} R\left(\frac{x}{mn}\right)\Lambda(m) = O\left(\frac{x}{n}\right)$$

Combinando los dos resultados anteriores obtenemos

$$\begin{aligned}&\left(R(x)\log x + \sum_{n\leq x} R\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n)\right)\log x\\ &\qquad - \sum_{n\leq x}\Lambda(n)\left(R\left(\frac{x}{n}\right)\log\frac{x}{n} + \sum_{m\leq x} R\left(\frac{x}{mn}\right)\Lambda(m)\right)\\ &\qquad = R(x)\log^2 x + \sum_{n\leq x} R\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n)\log x\\ &\qquad\qquad - \sum_{n\leq x}\sum_{m\leq\frac{x}{n}} R\left(\frac{x}{mn}\right)\Lambda(m)\Lambda(n)\\ &\qquad = O(x\log x) + O\left(x\sum_{x\leq n}\frac{\Lambda(n)}{n}\right) = O(x\log x)\end{aligned}$$

Esto último lo usaremos, pero necesitamos dos resultados primero

$$\sum_{n\leq x} R\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n)\log x - \sum_{n\leq x}\Lambda(n)R\left(\frac{x}{n}\right)\log\frac{x}{n} = \sum_{n\leq x}\Lambda(n)R\left(\frac{x}{n}\right)\log x$$

y también que

$$\sum_{n\leq x}\sum_{m\leq\frac{x}{n}} R\left(\frac{x}{mn}\right)\Lambda(m)\Lambda(n) = \sum_{n\leq x} R\left(\frac{x}{n}\right)\sum_{\substack{m,h\\ mh=n}}\Lambda(m)\Lambda(h)$$

Con estos dos resultados obtenemos que

$$R(x)\log^2 x = \sum_{n\leq x} R\left(\frac{x}{n}\right)\sum_{\substack{m,h\\ mh=n}}\Lambda(m)\Lambda(h) - \sum_{n\leq x} R\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n)\log n + O(x\log x)$$

Consideremos la siguiente sucesión

$$c_n = \Lambda(n)\log n + \sum_{\substack{m,h\\ mh=n}}\Lambda(m)\Lambda(h) \quad (9)$$

entonces tenemos que

$$|R(x)|\log^2 x \leq \sum_{n\leq x} c_n\left|R\left(\frac{x}{n}\right)\right| + O(x\log x)$$

Si tomamos la siguiente suma

$$\sum_{n\leq x} c_n = \sum_{n\leq x}\Lambda(n)\log n + \sum_{\substack{m,n\\ mn\leq x}}\Lambda(m)\Lambda(n)$$

Por la desigualdad de Selberg, siempre que x sea suficientemente grande

$$\sum_{n\leq x} c_n = 2x\log x + O(x)$$

Vamos a partir desde este punto, pero necesitamos el resultado de suavizado. Antes de eso un resultado conocido del análisis real

Lema 3. Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son dos sucesiones de números reales, definimos $A_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$, con $A_0 = 0$. Entonces se tiene la identidad

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

Teorema 7. Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea c_n definido en (9). Con x suficientemente grande tenemos lo siguiente

$$\sum_{n \leq x} c_n \left| R\left(\frac{x}{n}\right) \right| = 2 \int_{1}^{x} \left| R\left(\frac{x}{t}\right) \right| \log t \, dt + O(x \log x)$$

La demostración de este resultado se determina al considerar la sucesión $a(1) = c_1$ y
$a(n) = c_n - 2\int_{n-1}^{n} \log t \, dt$ para $n = 2, 3, 4, \ldots$ y aplicando el lema 3.

4. Una dirección logarítmica

Para todo $\rho \in \mathbb{R}_0^+$, definimos

$$V(\rho) = e^{-\rho} R(e^{\rho}) = e^{-\rho} \psi(e^{\rho}) - 1$$

Evocando el siguiente resultado del análisis

Lema 4 (Teorema de Tonelli) Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{B}, \upsilon)$ dos espacios de medida σ-finito y $F: X \times Y \longrightarrow [0, \infty)$ medible. Entonces

$$h(x) = \int_{Y} F_x d\upsilon, \quad g(y) = \int_{X} F_y d\mu$$

son medibles y

$$\int_{X} h d\mu = \int_{X \times Y} F d(\mu \times \upsilon) = \int_{Y} g d\upsilon$$

o bien

$$\int_X \int_Y F(x,y)\upsilon(dy)\,\mu(dx) = \int_{X\times Y} F(x,y)\mu \times \upsilon(dx,dy)$$
$$= \int_Y \int_Y F(x,y)\mu(dx)\,\upsilon(dy)$$

Escribiendo $x = e^{\xi}$, con la sustitución $\frac{x}{t} = e^{\eta}$ en lo que sigue

$$\int_1^x \left|R\left(\frac{x}{t}\right)\right| \log t\, dt = x\int_0^{\xi} |V(\eta)|(\xi-\eta)d\eta$$
$$= x\int_0^{\xi}\int_{\eta}^{\xi} |V(\eta)|d\tau\, d\eta$$
$$= x\int_0^{\xi}\left(\int_0^{\tau}|V(\eta)|d\eta\right)d\tau$$

Esto es posible, ya que el integrando es no negativo y por el lema 4 el valor de la integral es independiente del orden. Además, la región de integración; es el conjunto de puntos (τ,η) que comprende el dominio de integración para

$$\int_0^{\xi}\int_{\eta}^{\xi} |V(\eta)|d\tau\, d\eta$$

Es $\{(\tau,\eta): 0 \le \eta \le \xi, \eta \le \tau \le \xi\} = \{(\tau,\eta): 0 \le \eta, \tau \le \xi\} =$ $\{(\tau,\eta): 0 \le \tau \le \xi, 0 \le \eta \le \tau\}$ lo cual corresponde exactamente al dominio de la doble integral

$$\int_0^{\xi}\int_0^{\xi} |V(\eta)|d\tau\, d\eta$$

Entonces tenemos que

$$\xi^2|V(\xi)| \leq 2\int_0^{\xi}\left(\int_0^{\tau}|V(\eta)|d\eta\right)d\tau + O(\xi) \qquad (10)$$

Es claro que $|V(\rho)|$ es acotado, cuando $\rho \to \infty$. Entonces,

$\alpha = \lim_{\xi\to\infty} \sup|V(\xi)|$ y $\beta = \lim_{\xi\to\infty} \sup \frac{1}{\xi}\int_0^{\xi}|V(\eta)|d\eta$

están bien definidas.

Observación. $|V(\xi)| \leq \alpha + O(1)$ cuando $\xi \to \infty$. La desigualdad no funciona si α es reemplazado por un número pequeño.

Por otro lado, cuando $\xi \to \infty$ tenemos que

$$\int_0^{\xi}|V(\eta)|d\eta \leq \beta\xi + O(\xi)$$

y entonces se sigue de (10) que

$$\xi^2|V(\xi)| \leq 2\int_0^{\xi}\big(\beta\tau + O(\tau)\big)d\tau + O(\xi) = \beta\xi^2 + O(\xi^2)$$

y entonces $|V(\xi)| \leq \beta + O(1)$. Así, obtenemos que $\alpha \leq \beta$.

5. Últimos pasos para la deducción del teorema

El Teorema de los Números Primos es equivalente probar que $V(\xi) \to 0$, cuando $\xi \to \infty$, en otras palabras, cuando $\alpha = 0$. Asumiremos lo contrario que $\alpha > 0$, y deduciremos una contradicción que $\beta < \alpha$. Vamos a requerir algunos resultados

Teorema 8 Existe constantes positivas C_1 y C_2 tales que se obtiene

(i) Para todo $\xi_1, \xi_2 > 0$ y satisfaciendo $\xi_1 < \xi_2$, tenemos que

$$\left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} V(\eta) d\tau \right| < C_1$$

(ii) Suponga que $V(\eta_0) = 0$ para algún $\eta_0 > 0$. Entonces

$$\int_{\eta_0}^{\eta_0+\alpha} |V(\eta)| d\eta \leq \frac{3}{4}\alpha^2 + C_2 \frac{\alpha}{\eta_0}$$

Demostración

Vamos a probar (i), usaremos la identidad de Abel con $a(n) = \Lambda(n)$ y $f(x) = \frac{1}{x}$ obteniendo

$$\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \frac{\psi(x)}{x} + \int_1^x \frac{\psi(t)}{t^2} dt$$

y siguiendo el lema 2, y que $\psi(x) = O(x)$ tenemos

$$\int_1^x \frac{\psi(t)}{t^2} dt = \log x + O(1)$$

Escribiendo $t = e^\eta$ y $x = e^\xi$, tenemos

$$\int_0^\xi V(\eta)\, d\eta = \int_1^x \frac{R(t)}{t^2} dt = \int_1^x \left(\frac{\psi(t)}{t^2} - \frac{1}{t} \right) dt = O(1)$$

lo cual es equivalente decir que se cumple (i).

Vamos a probar (ii), utilizando con la desigualdad (iv) del teorema 3. Si $1 \leq x_0 < x$, entonces tenemos

$$\psi(x_0) \log x_0 + \sum_{\substack{m,n \\ mn \leq x_0}} \Lambda(m)\Lambda(n) = 2x_0 \log x_0 + O(x_0) \qquad (11)$$

Sustrayendo (11) de la desigualdad (iv) del teorema 3 y notando que la suma

$$\sum_{x_0<mn\leq x} \Lambda(m)\Lambda(n)$$

es no negativa y que la función $\psi(x)$ es creciente, tenemos

$$0 \leq \psi(x)\log x - \psi(x_0)\log x_0 \leq 2(x\log x - x_0\log x) + O(x)$$

y entonces

$$|R(x)\log x - R(x_0)\log x_0| \leq x\log x_0 - x_0\log x + O(x) \quad (12)$$

Supongamos que $V(\eta_0) = 0$ y $\eta_0 \leq \eta \leq \eta_0 + \alpha$. Entonces escribimos $x = e^{\eta}$ y $x_0 = e^{\eta_0}$, tenemos que $R(x_0) = 0$ y siguiendo de (12) que

$$|e^{\eta}V(\eta)\eta| \leq e^{\eta}\eta - e^{\eta_0}\eta_0 + O(e^{\eta})$$

Por el teorema de valor medio para las derivadas se obtiene que

$$e^{\eta}\eta - e^{\eta_0}\eta_0 = (\eta - \eta_0)e^{\hat{\eta}}(1 + \hat{\eta})$$

Para algún $\hat{\eta}$ satisfaciendo $\eta_0 < \hat{\eta} < \eta$. Entonces

$$|V(\eta)| \leq (\eta - \eta_0)\frac{e^{\eta}(1+\hat{\eta})}{e^{\eta}\eta} + O\left(\frac{1}{\eta_0}\right) \leq \frac{3}{2}(\eta - \eta_0) + O\left(\frac{1}{\eta_0}\right)$$

El resultado (ii) se deduce.

Supongamos ahora que $\alpha > 0$.
Escogiendo un adecuado $\delta > \alpha$ y fijándolo posteriormente, podremos estudiar el comportamiento de la función $V(\eta)$ en un intervalo $[\tau, \tau + \delta]$.La $V(\eta)$ es estrictamente decreciente en los puntos de continuidad, con un salto positivo en los puntos de discontinuidad. Considerando el intervalo abierto $(\tau, \tau + \delta - \alpha)$, es suficiente

considerar que existe η_0 en $(\tau, \tau+\delta-\alpha)$, tal que $V(\eta_0)=0$ o $V(\eta)$ cambia de signo al menos una vez en $(\tau, \tau+\delta-\alpha)$.
El primer paso, escribimos

$$[\tau, \tau+\delta] = [\tau, \eta_0] \cup [\eta_0, \eta_0+\alpha] \cup [\eta_0+\alpha, \tau+\delta]$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_{\tau}^{\tau+\delta} |V(\eta)| d\eta &\leq (\eta_0-\tau)\big(\alpha+O(1)\big)+\frac{3}{4}\alpha^2+C_2\frac{\alpha}{\tau} \\ &\quad +(\tau+\delta-\eta_0-\alpha)\big(\alpha+O(1)\big) \\ &= (\delta-\alpha)\big(\alpha+O(1)\big)+\frac{3}{4}\alpha^2+C_2\frac{\alpha}{\tau} \\ &= \left(\alpha\left(1-\left(\frac{\alpha}{4}-\frac{C_2}{\tau}\right)\frac{1}{\delta}\right)+O(1)\right)\delta\end{aligned}$$

Existe una constante positiva $C_3 = C_3(\alpha)$, que depende de α, tal que

$$\int_{\tau}^{\tau+\delta} |V(\eta)| d\eta \leq \alpha\left(1-\frac{\alpha}{8\delta}\right)\delta$$

donde $\tau \geq C_3$.

En el segundo caso, si $V(\eta)$ cambia de signo en $\eta_1 \in (\tau, \tau+\delta-\alpha)$, escribimos

$$[\tau, \tau+\delta-\alpha] = [\tau, \eta_1] \cup [\eta_1, \tau+\delta-\alpha]$$

Entonces

$$\int_{\tau}^{\tau+\delta-\alpha} |V(\eta)| d\eta = \left|\int_{\tau}^{\eta_1} V(\eta) d\eta\right| + \left|\int_{\eta_1}^{\tau+\delta-\alpha} V(\eta) d\eta\right| < 2C_1$$

Si $V(\eta)$ no cambia de signo en $(\tau, \tau+\delta-\alpha)$, entonces

$$\int_{\tau}^{\tau+\delta-\alpha} |V(\eta)|d\eta = \left| \int_{\tau}^{\tau+\delta-\alpha} V(\eta)d\eta \right| < C_1$$

En cualquier caso, tenemos

$$\int_{\tau}^{\tau+\delta-\alpha} |V(\eta)|d\eta < 2C_1$$

Y entonces, escribimos $[\tau, \tau+\delta] = [\tau+\tau+\delta-\alpha] \cup [\tau+\delta-\alpha, \tau+\delta]$, tenemos que

$$\int_{\tau}^{\tau+\delta-\alpha} |V(\eta)|d\eta < 2C_1 + \big(\alpha + O(1)\big)\alpha = \left(\frac{2C_1+\alpha^2}{\delta} + O(1)\right)\delta$$

Existe una constante positiva $C_4 = C_4(\alpha)$, que depende de α, tal que

$$\int_{\tau}^{\tau+\delta-\alpha} |V(\eta)|d\eta \leq \frac{3C_1+\alpha^2}{\delta}$$

Donde $\tau \geq C_4$. Ahora sea

$$\delta = \frac{24C_1 + 9\alpha^2}{8\alpha} > \alpha$$

Entonces

$$\frac{3C_1+\alpha^2}{\delta} = \alpha\left(1 - \frac{\alpha}{8\delta}\right)$$

Para un número real suficientemente grande ξ, sea los enteros K_0 y K satisfaciendo las desigualdades

$$(K_0 - 1) < \max\{C_3, C_4\} \leq K_0\delta$$
$$K\delta \leq \xi < (K+1)\delta$$

Entonces

$$\int_{0}^{\xi} |V(\eta)|d\eta \leq \int_{\prime}^{K_0\delta} |V(\eta)|d\eta + \sum_{k=K_0}^{K} \int_{k\delta}^{(k+1)\delta} |V(\eta)|d\eta$$

$$\leq K\alpha\left(1 - \frac{\alpha}{8\delta}\right)\delta + O(1) = \alpha\left(1 - \frac{\alpha}{8\delta}\right)\xi + O(\xi)$$

Tenemos que

$$\beta \leq \alpha\left(1 - \frac{\alpha}{8\delta}\right) < \alpha$$

Llegando a una contradicción, así hemos probado el Teorema de los Números Primos.

CONCLUSIONES

El interés histórico en los números primos ha permitido construir y demostrar resultados matemáticos cuya aplicación han influido en el desarrollo de la civilización.

Como hemos visto el Teorema de los Números Primos y la hipótesis de Riemann guarda una relación especial con las fórmulas asintóticas.

REFERENCIAS

Apostol, T.M. (2009). *Análisis Matemático*, Barcelona, España: Reverté.

Apostol, T.M. (2014). *Introducción a la teoría analítica de números*, Barcelona, España: Reverté.

Erdös, P. (1949). On a New Method in Elementary Number theory which Leads to An Elementary Proof of The Prime Number Theorem, *National Academy of Sciences*, 35(7), 374-384.

Levinson, N. (1969). A Motivated Account of An Elementary Proof of The Prime Number Theorem, *The American Mathematical Monthly*,76(3), 225-245.

Newman, D. (1980). Simple Analytic Proof of The Prime Number Theorem, *The American mathematical Monthly*, 87(9), 693-696.

Selberg, A. (1949). An Elementary Proof of The Prime Number Theorem, *Annals of Math*, 50(2), 305-313.

Tatuzawa, T., y Iseki, K. (1951). On Selberg's Elementary Proof of The Prime Number Theorem, *Proceedings of the Japan Academy, Series A*, 27(7), 340-342.

Trujillo, J. (2016). *El Teorema de los Números Primos* (tesis de pregrado). Universidad de Panamá, Panamá.

Recibido 14 de diciembre de 2018, aceptado 10 de mayo de 2019.